

# 多网格法解总变分问题及在医学图像增强中的应用

陈胜<sup>1)</sup> 杨新<sup>1)</sup> 姚丽萍<sup>2)</sup> 孙锟<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(上海交通大学图像处理与模式识别研究所, 上海 200030)

<sup>2)</sup>(上海第二医科大学附属新华医院儿童医学中心, 上海 200127)

**摘要** 传统的各向同性平滑方法,如拉普拉斯平滑方法,虽然能去掉图像的噪声,但同时也可能使图像的边缘信息模糊,甚至丢失。针对这种情况,基于总变分的平滑方法得到重视,因为该方法可以在去除噪声的同时,对边缘的信息进行增强,但是由于基于总变分的平滑方法计算量大,且用松弛法迭代的收敛速度比较慢,因此引入了多网格预处理的共轭梯度算法来解总变分问题。计算结果表明,共轭梯度法的收敛速度明显高于松弛法,而采用多网格法收敛速度还可以得到进一步提高。为说明该方法的优点,最后对用这两种方法处理的超声医学图像的收敛曲线和平滑结果进行了比较。

**关键词** 总变分 多网格 共轭梯度

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)07-0787-05

## Total Variation Regularization Solved by Multi-grid Method and Applied in Image Denoising

CHEN Sheng<sup>1)</sup>, YANG Xin<sup>1)</sup>, YAO Li-ping<sup>2)</sup>, SUN Kun<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Institute of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

<sup>2)</sup>(Shanghai Children's Medical Center of Shanghai Second Medical University, Shanghai 200127)

**Abstract** The isotropic diffusion method for image denoising such as those based on the Laplace regularization can smooth out the noise in image, but it may simultaneously blur the edge or boundary of the objects. In order to overcome this problem, recently many researchers pay attention to the smooth method based on the total variation (TV) regularization because it can reserve or even enhance the information of edge when smoothing the noise. However, since equation system deduced by TV method is a strongly nonlinear system, the convergence rate is very slow when solving TV equations using relaxation method. So in this paper, we introduce the multi-grid algorithm and conjugate gradient (CG) algorithm to solve this system. By smoothing out the noise in the echocardiographic images, numerical results indicate that the convergence rate of CG is fast, the algorithm of multi-grid has more efficiency and the image can be recovered with satisfied result even contamination of strong noise. As a result, the multi-grid algorithm is a good alternative method for solving the TV questions.

**Keywords** total variation, multi-grid method, conjugate gradient method

## 1 引言

由于图像的平滑去噪问题是一个奇异问题<sup>[1]</sup>,需要引入约束项以获得平滑问题的稳定解,而经常用到的是 Tikhonov 规则约束<sup>[2]</sup>,它又称为最小二次项约束,但由于它要求图像是平滑的,否则会出现 Gibbs 现象,所以它对于一般的图像处理的效果不

是很好。文献[3,4]对总变分法(total variant, 简称 TV 法)的理论进行了分析,由于总变分约束规则,不再要求图像是平滑或者是连续的,因此特别适合于具有陡峭边界的块状图像去噪。

由于基于总变分约束规则的图像去噪问题的收敛速度比较慢,因此目前很多学者对此进行研究,其中一种常用的方法是将其转化为最小化问题,即用演化的方法来解相应的 Euler-Lagrange 方程式<sup>[5]</sup>,

为了得到比较快的收敛速度,从理论上说,虽可以采用像 BFGS<sup>[6]</sup> 这样标准的数值最优技术来求解,但是对于总变分问题,这样的方法效果很不理想,文献 [7] 证明,最主要的问题是 BFGS 这样的标准方法的基础——局部二次逼近对于总变分这类非线性问题并不是一个很好的模型。

本文针对 TV 最小化的非线性问题采用了如下两种实现方法:第 1 种方法是先采用固定点迭代方法 (FP) 使非线性问题转化为线性问题<sup>[7]</sup>,这种迭代方法可以被看作是半二次规则方法<sup>[8,9]</sup>和 ARTUR 方法<sup>[10]</sup>的一个特例,由于这样迭代收敛是线性的,而不是二次非线性的,而且对于任意的初始估计解,它都是全局收敛的,因此在此基础上只需解一组线性方程系统即可,虽然解线性方程系统常采用松弛算法,但是对于总变分问题,由于松弛算法的收敛速度很慢,因此本文中采用了预处理双共轭梯度算法<sup>[11]</sup>。在连续情况下,由于在 TV 最小化中得到的 Hessian 微分(扩散)算子  $H$  是稀疏矩阵,因此根据这个特殊点,可以用稀疏矩阵的特殊解法来大量降低计算复杂度。

第 2 种方法是多网格计算方法,它的基本思想是在将偏微分方程离散化成为差分方程的过程中,采用不同大小的网格<sup>[11]</sup>。它最初虽是为了提高松弛法的收敛速度而提出的,但在求解基于总变分的平滑方程中,它可以被看作是椭圆形的偏微分方程,它不仅可直接采用 FAS 算法来求解,而且不需要进行线性化。

## 2 基于总变分图像平滑的数学模型

在进行图像平滑时,应考虑下面的噪声化和模糊化数据的数学模型

$$z = Ku + \varepsilon \quad (1)$$

其中,  $K$  是一个平滑算子,  $\varepsilon$  是噪声,  $u$  就是要恢复的图像。由于上式是一个奇异的问题<sup>[6]</sup>,因此,从离散化这个等式得到的矩阵系统也是严重奇异的。为了稳定式(1)的解,经常使用 Tikhonov 约束方法,这样恢复  $u$  的问题就被转变为寻找  $u$ , 并使下面的等式最小化的问题。

$$T(u) = \frac{1}{2} \|Ku - z\|^2 + \alpha J(u) \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为正的参数,  $J$  为已知的泛函。通常对  $J$  的选择是

$$J(u) = \int_{\Omega} u^2 dx \quad (3)$$

当  $u$  不连续时,式(3)通常会产生伪振动(Gibbs 现象),或称为环。

另外尚需考虑如下形式的总变分泛函,

$$J_{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad (4)$$

由于这里  $u$  不一定是连续的,所以式(4)对于图像平滑是一个比较好的约束项。但是,由于在 Euclidean 空间中的 0 点邻域内不可导,因此将式(4)修改如下:

$$J_{\beta}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} dx \quad (5)$$

由于在下面的章节中,将最小化下面的式子

$$T(u) = \frac{1}{2} \|Ku - z\|^2 + \alpha \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2} dx \quad (6)$$

因此这里列出与式(6)相关的 Euler-Lagrange 等式如下:

$$g(u) = K^*(Ku - z) + \alpha L(u)u = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial \Omega \quad (7)$$

式中,  $K^*$  表示算子  $K$  的伴随矩阵,  $L(u)$  是微分算子,它对元素  $\omega$  的作用如下:

$$L(u)\omega = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta^2}} \nabla \omega \right) \quad (8)$$

由于式(7)是非线性的椭圆性微分积分方程,  $K^*K$ ,  $L(u)$  都是正的对半有界的算子,因此可以通过将式(7)平方根项中的  $u$  用  $u^{(m)}$  代替来实现线性化,描述如下:

$$[K^*K + \alpha L(u^{(m)})]u^{(m+1)} = K^*z, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

上式中,  $[K^*K + \alpha L(u^{(m)})]$  为 Hessian 微分(扩散)算子,其是稀疏矩阵,简称  $H$  阵。

## 3 共轭梯度与多网格算法

### 3.1 共轭梯度算法

最常见的共轭梯度算法<sup>[12]</sup>,是仅当矩阵  $A$  为对称及正定的时候,它基于极小化下面函数的思想<sup>[3]</sup>

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot A \cdot x - b \cdot x \quad (10)$$

当它的梯度

$$\nabla f = A \cdot x - b \quad (11)$$

为零时,该函数极小化,即相当于解方程

$$A \cdot x = b \quad (12)$$

极小化的实现是通过产生一个搜索方向  $p_k$  的后继以及改变极小化的因变量  $x_k$ , 且每一步都是要找一量  $a_k$  来极小化  $f(x_k + a_k p_k)$ , 这样经过  $N$  次迭代后便可到达整个向量空间的极小点, 也就是上式的解, 但是由于并不是所有的矩阵  $A$  都是对称的和正定的, 如本文中解决的总变分问题就不是对称的, 所以对普通的共轭梯度算法的一种推广是预处理双共轭梯度法<sup>[11]</sup>。

现在讨论算法中的收敛速度问题, 对于条件好的矩阵, 即“靠近”单位阵的矩阵, 普通的共轭梯度算法效果最好, 这提示可以将这些方法应用于如下预处理条件的形式:

$$(\hat{A}^{-1} \cdot A) \cdot x = \hat{A}^{-1} \cdot b \quad (13)$$

这种想法是, 对于求解接近于  $A$  的某个  $\hat{A}$  的线性系统可能容易些, 其中  $\hat{A}^{-1} \cdot A \approx 1$ , 它允许算法在较少的步数内收敛, 矩阵  $\hat{A}$  是一个先决条件, 下面给出一种有预处理条件的双共轭梯度算法, 或称为 PBCG<sup>[11]</sup>。

$$\begin{aligned} \hat{A} \cdot z_k &= r_k \\ \hat{A}^T \cdot \hat{z}_k &= \hat{r}_k \\ a_k &= \frac{\hat{r}_k \cdot z_k}{\hat{p}_k \cdot A \cdot p_k} \\ \beta_k &= \frac{\hat{r}_{k+1} \cdot z_{k+1}}{\hat{r}_k \cdot z_k} \\ p_{k+1} &= z_k + \beta_k p_k \\ \hat{p}_{k+1} &= \hat{z}_k + \beta_k \hat{p}_k \\ x_{k+1} &= x_k + a_k p_k \end{aligned}$$

### 3.2 多网格算法

多网格算法是 Brandt 在 20 世纪 70 年代首次提出的, 这些方法可以用  $O(N)$  次运算来求解在  $N$  个网格点上的椭圆形偏微分方程<sup>[11]</sup>, 而多网格法的关键思想, 则可以通过研究最简单的两网格法来理解<sup>[11]</sup>。

在多网格算法中, 需要用到光滑算子、限制算子和拓展算子。在本文中, 光滑方法用的是高斯-赛德尔法, 其中拓展算子可用下面的矩阵表示:

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

而限制算子则可表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

由于本文中求解的是非线性椭圆问题, 因此采用的是非线性多网格算法(FAS)。

为实现非线性算法, 假定像线性情形一样, 已经有一个能光滑残差向量的松弛过程, 于是可以找一个光滑的修正值  $v_h$  来解以下方程

$$L_h(u_h) = f_h \quad (14)$$

$$L_h(\hat{u}_h + v_h) = f_h \quad (15)$$

其中下角  $h$  代表在细网格上。

为了找到  $v_h$ , 由于注意到

$$L_h(\hat{u}_h + v_h) - L_h(\hat{u}_h) = f_h - L_h(\hat{u}_h) = -d_h \quad (16)$$

将其转移到如下粗网格上:

$$L_{\hat{h}}(u_{\hat{h}}) - L_{\hat{h}}(R\hat{u}_h) = -Rd_h \quad (17)$$

即可在粗网格上解(下角  $\hat{h}$  代表在粗网格上)

$$L_{\hat{h}}(u_{\hat{h}}) = L_{\hat{h}}(R\hat{u}_h) - Rd_h \quad (18)$$

假定近似解为  $\hat{u}_{\hat{h}}$ , 则粗网格上的修正值为

$$\hat{v}_{\hat{h}} = \hat{u}_{\hat{h}} - R\hat{u}_h \quad (19)$$

以及

$$\hat{u}_h^{\text{new}} = \hat{u}_h + \rho(\hat{u}_{\hat{h}} - R\hat{u}_h) \quad (20)$$

因此, FAS 多网格算法与线性多网格算法看来极其相似, 其差别仅是, 亏损  $d_h$  和近似值  $u_h$  都必须被限制在粗网格上, 且真正需要的解非线性系统仅是在最粗网格上。在实现非线性多网格算法前, 还有一项工作, 就是选择一个非线性的平滑格式, 本文中选择的还是非线性的高斯-赛德尔格式。如离散化方程后,

$$L_i(u_1, \dots, u_N) = f_i, i = 1, \dots, N \quad (21)$$

则非线性高斯-赛德尔格式可为求  $u_i^{\text{new}}$  而解下面的方程

$$L_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{\text{new}}, u_{i+1}, \dots, u_N) = f_i \quad (22)$$

一旦新  $u$  计算出来就要代替旧的  $u$ , 其中  $u_i^{\text{new}}$  方程通常是线性的, 这是因为非线性项通过邻近项被离散化了, 否则, 可以用一步牛顿迭代来代替上面的方程。

$$u_i^{\text{new}} = u_i^{\text{old}} + \frac{L_i(u_i^{\text{old}}) - f_i}{\partial L_i(u_i^{\text{old}}) / \partial u_i} \quad (23)$$

## 4 实验结果

为验证本文算法效果, 本文选择了小儿心脏超声图像进行了实验验证, 图 1 为原始的超声图像侧视图, 图 2(a)为原始的超声图像及三维重建后的俯视图, 图像均为灰度图像, 大小为  $240 \times 240$  pixels, 且灰度值的范围在 0 至 255 之间。



(a) 小儿心脏侧视原始超声图像



(b) 用总变分约束规则平滑后的超声图像

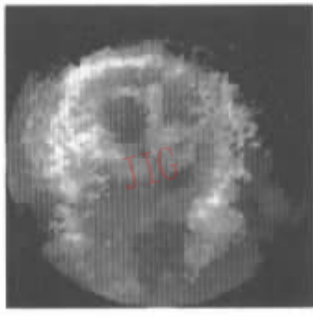


(c) 高斯滤波后的超声图像

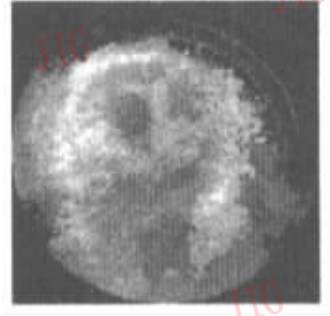


(d) 中值滤波后的超声图像

图 1 几种不同方法处理后的小儿心脏超声图像



(a) 原始超声图像



(b) 加入了 20% 的噪声的超声图像

图 2 小儿心脏俯视超声图像

由图 1 可见,图 1(b)证明了基于总变分约束的方法确实能有效地去除心壁处的噪声,且能保持上三角处边缘信息,高斯去噪方法虽然能去除噪声,但同时也模糊了图像的边缘信息(图 1(c)),而中值滤波的效果对于超声图像来说效果不是很好(图 1(d))。

图 2(b)为图 2(a)中加入了 20%人为噪声的超声图像,并以此图为待处理图像来分析算法的收敛性和有效性。

在共轭梯度算法中,首先需要使用固定点迭代算法对非线性系统进行线性化处理,然后在每一步固定点迭代中再使用共轭梯度算法。

从图 3 中可以看出,只需要迭代有限的几次,结

果就可以满足需要,而在每一步的共轭梯度算法中,

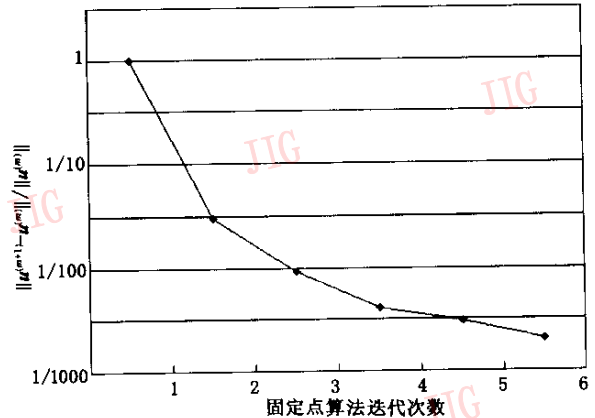


图 3 固定点迭代算法的收敛性曲线

本文使用的是针对非对称、非正定系统的预处理双共轭梯度算法(PBCG)。图 4 说明算法很快就收敛到期望的误差内。

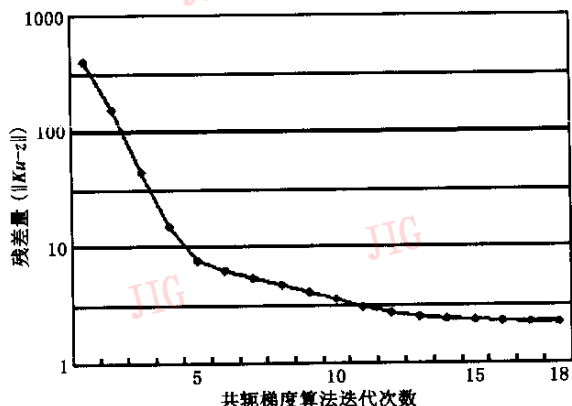


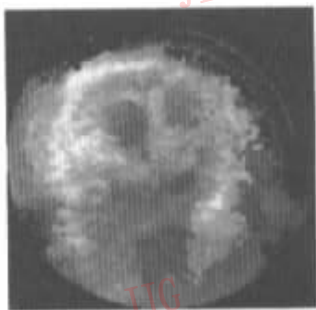
图 4 当  $m=1$  时共轭梯度算法的收敛性

理,在效果上几乎没有什么差别。对于线性的系统,共轭梯度算法与多网格算法的时间复杂度都一样,而对于非线性系统的椭圆形偏微分方程来说,多网格算法的效率几乎没有降低,时间复杂度还是为 $O(N\log N)$ ,由于共轭梯度算法必须预先进行线性化,所以效率明显不如多网格算法。从表 1 可以看出,针对总变分这类的问题,多网格算法的效率明显高于共轭梯度算法,并且当图像大小接近 $(2^n \times 2^n)$ 像素时,多网格算法更能够发挥它的效率,这是因为在多网格算法中,网格的大小必须是 $2^n \times 2^n$ ,当图像小于 $2^n \times 2^n$ ,而大于 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ 时,时间复杂度是按照 $2^n \times 2^n$ 计算的。

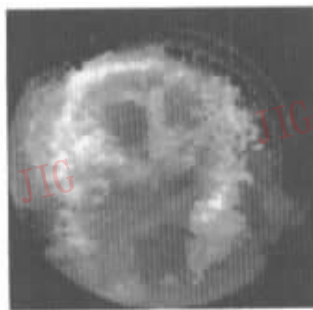
表 1 共轭梯度算法和多网格算法分别处理不同大小图像所需要的时间 单位:s

处理方法	图像大小(Pixels)					
	240×240	180×180	120×120	80×80	60×60	40×40
PBCG	15.42	8.20	3.7	1.42	0.63	0.13
Multi-Grid	5.77	5.82	1.32	1.39	0.33	0.33

由图 5(a)和图 5(b)可看出,基于两种算法的处



(a) 使用共轭梯度算法处理的结果



(b) 使用多网格算法处理的结果

图 5 小儿心脏俯视超声图像两种不同方法处理结果

## 5 结 论

因为常见的平滑去噪方法较难解决去噪与模糊之间的矛盾,而总变分法则可以解决这样的矛盾。在用共轭梯度算法进行平滑去噪的过程中,由于它是一个病态的系统,需首先使得系统稳定,然后采用固定点迭代算法使其线性化,才可以保证系统是全局收敛的,所以解的初始值选择对结果影响不大。在每一步固定点迭代求解大规模的线性系统时,由于 Hessian 微分(扩散)算子是一个稀疏矩阵,虽然本文中采用了针对稀疏矩阵  $H$  的存储方法,但对于多网格算法则不需要进行繁琐的预处理,因此算法的效率提高了,根据上面的实验结果,多网格算法的计算时间大概是共轭梯度算法的 1/3。

## 参 考 文 献

- 1 Groetsch C W. Inverse problems in the mathematical science [M]. Wiesbaden, Germany: Vieweg, 1993.
- 2 Tikonov A N. Regularization of incorrectly posed problems[J]. Soviet Mathematics Dokl, 1963, **4**:1624~1627.
- 3 Acar R, Vogel C R. Analysis of total variation penalty methods [J]. Inverse Problems, 1994, **10**:1217~1229.
- 4 Dobson D, Santosa F. Recovery of blocky images from noisy and blurred data[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal Application Mathematics, 1996, **56**(4):1181~1198.
- 5 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D: nontinear Phenomena, 1992, **60**(1~4):259~268.
- 6 Dennis J, Schnabel R B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations[M]. Englewood Cliffs NJ, USA: Prentice-Hall, 1993.
- 7 Vogel C R, Oman M E. Iterative methods for total variation denoising[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics

Journal Society Computer, 1996, 7(1): 27~238.

- 8 German D, Reynolds G. Constrained image restoration and the recovery of discontinuities [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(3): 367~383.
- 9 German D, Yang C. Nonlinear image recovery with half-quadratic regularization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1995, 4(7): 932~945.
- 10 Charbonnier P, Feraud L B, Aubert G. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(2): 298~311.
- 11 Press W H, Teukolsky S A. Numerical Recipes in C The art of scientific computing [M]. Hardcover, UK: Cambridge University Press, 1992: 60~75, 734~746.
- 12 杨新. 图像偏微分方程的原理与应用 [M], 上海: 上海交通大学出版社, 2003: 40~44.



陈胜 1976年生, 1999年获得西安电子科技大学计算机学院学士学位, 2002年于西安电子科技大学获得硕士学位, 现为上海交通大学自动化系博士研究生。主要研究领域为偏微分方程在医学图像处理中的应用。

E-mail: chnshn@163.com



杨新 1950年生, 1982年获西北工业大学自动控制工程硕士学位, 1995年在比利时布鲁塞尔自由大学获应用科学博士学位, 1995年至1997年在西北工业大学计算机系进行博士后研究, 现为上海交通大学图像处理模式识别研究所教授, 博士生导师。主要从事有关图像偏微分方程算法和应用、序列图像中的运动物体识别、图像匹配等研究。

姚丽萍 2003年获上海第二医科大学硕士学位。研究领域为小儿先天性心脏病的超声心动图诊断。

孙锐 1962年生, 1985年毕业于温州医学院儿科系, 1987年考入上海第二医科大学, 先后获硕士和博士学位, 现为上海第二医科大学教授, 博士生导师。研究领域为小儿心血管, 长期从事小儿先天性心脏病的超声心动图及心导管造影诊断。